

文章编号: 1000-8055(2010)04-0957-06

斜齿轮啮合刚度变化规律研究

卜忠红, 刘 更, 吴立言
(西北工业大学 机电学院, 西安 710072)

摘 要: 利用基于线性规划法计算啮合刚度和载荷分布的改进方法, 分别计算了一对内、外啮合斜齿轮在不同螺旋角时的啮合刚度, 总结了啮合刚度在一个啮合周期内的变化规律. 计算结果表明, 所有参与啮合轮齿形成的啮合线总长度是决定啮合刚度大小的主要因素, 在进入啮合和退出啮合的瞬时位置, 啮合刚度会减小. 通过与航空工业部标准 (HB/Z 84.1-1984) 算法的计算结果比较, 浅析了轮缘厚度对啮合刚度的影响.

关 键 词: 内、外啮合斜齿轮; 啮合刚度; 真实变化规律; 轮缘厚度; 线性规划

中图分类号: TH132

文献标识码: A

Research on the variation rules of meshing stiffness of the helical gear

BU Zhong-hong, LIU Geng, WU Li-yan

(School of Mechanical Engineering,
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The time-varying meshing stiffness is one of inherent characteristics of gear system vibration. The meshing stiffness of an external and inner helical gear pair with different helical angles was solved respectively using a modified method, which could determine the meshing stiffness and actual load distribution based on linear programming. The variation rules of meshing stiffness during one whole meshing period were summarized. The following findings were obtained in this paper: the key factor that influences the meshing stiffness most significantly is the whole length of contact-line of all the teeth in the engagement. The meshing stiffness decreases at the instantaneous position where the teeth enter contact or exit contact. The results were compared with those obtained by aerospace industry ministry standard (HB/Z 84.1-1984) and the influence of rim thickness on the meshing stiffness was analyzed.

Key words: external and internal helical gear; meshing stiffness;
actual variation rules; rim thickness; linear programming

齿轮啮合刚度的周期性变化是齿轮系统振动的一个主要内部参数激励, 齿轮副啮合刚度的计算是齿轮系统动态特性分析的基础. 已有学者研究了时变啮合刚度对单级定轴传动^[1]、多级定轴传动^[2]、单级行星传动^[3]和组合行星传动^[4]动态特性的影响. 已有学者对斜齿轮啮合刚度和载荷分布做了理论^[5-11]和实验研究^[12], 而这些报道鲜

有关于啮合刚度在一个啮合周期中变化规律的讨论. 早期关于啮合刚度研究的典型成果是 Umezawa 用等效悬臂梁的有限差分模型计算了斜齿轮的载荷分布^[5-9], 总结出了斜齿刚度的近似计算公式^[10]. 刘更^[11]提出了一种利用有限元方法计算内、外啮合齿轮副啮合刚度的方法, 并且分析了齿轮参数对斜齿轮传动副啮合刚度的影响. 但

收稿日期: 2009-04-14; 修订日期: 2009-07-07

作者简介: 卜忠红(1983-), 男, 湖北荆州人, 博士生, 研究方向为行星传动, 齿轮系统动力学等.

是由于当时的计算条件有限,计算过程中在每个啮合周期中所取的啮合位置太少,计算结果未能揭示出啮合刚度在一个啮合周期中的真实变化规律.

本文利用基于线性规划法计算渐开线圆柱齿轮副啮合刚度和载荷分布的改进方法,发挥三维造型软件和有限元计算软件便于参数化的优势,分别计算了螺旋角不同时一组内、外啮合斜齿轮副的啮合刚度,旨在揭示内、外啮合斜齿轮副啮合刚度在一个啮合周期过程中的真实变化规律.

1 计算方法简介

1.1 线性规划法^[11]

齿轮啮合过程中,为了保证同一啮合位置下不同轮齿是同时啮合的即两轮齿间接触的连续性,同一啮合位置每一条啮合线上任意接触点的总变形应该是相等的.根据位移方程可以建立如下变形协调方程:

$$\sum_j^n f_{ij} p_j = C \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (1)$$

式中 f_{ij} —柔度影响系数,其意义是仅在第 j 个啮合点处施加单位载荷,两轮齿在第 i 个啮合点处的法向位移之和;

p_j —法向载荷,表示作用于该啮合位置下第 j 个啮合点处的法向载荷;

n —该啮合位置下选取的啮合节点的总个数;

C —总变形,该啮合位置下每一个接触点沿法向产生的总位移.

传递的总法向载荷应等于各结点载荷之和

$$\sum_j^n p_j = P \quad (2)$$

啮合刚度定义为使一对或者几对同时啮合的精确轮齿在 1mm 齿宽上产生 1 μ m 挠度所需的啮合线上的法向载荷^[14].根据式(1)和(2)可以计算出在齿轮副传递的总法向载荷 P 的作用下每个啮合位置下一对斜齿轮的变形.因此啮合刚度 G_V 可以这样计算

$$G_V = P / (C \cdot B) \quad (3)$$

其中 B 为齿宽,单位取为 mm, C 的单位取 μ m, P 的单位取 N.

1.2 改进方法^[13]

近年来,随着三维造型和有限元计算商务软件逐渐成熟,使利用它们强大的造型、前处理、计算、后处理和参数化等功能研究齿轮的时变啮合刚度和载荷分布问题成为可能.本文利用基于线性规划法的计算齿轮副啮合刚度和载荷分布的改进方法,该方法运用造型软件 Pro_E 建立包含真实渐开线齿廓的齿轮三维参数化模型,利用自主开发的软件划分啮合位置,利用有限元软件 ANSYS 计算齿面柔度系数,最后用 Matlab 实现线性规划法求解啮合刚度与载荷分布.该方法通过对整个计算过程数据流的控制已经实现了接触线生成程序,Pro_E,ANSYS 和线性规划法实现程序的无缝连接.计算的总流程如图 1 所示.

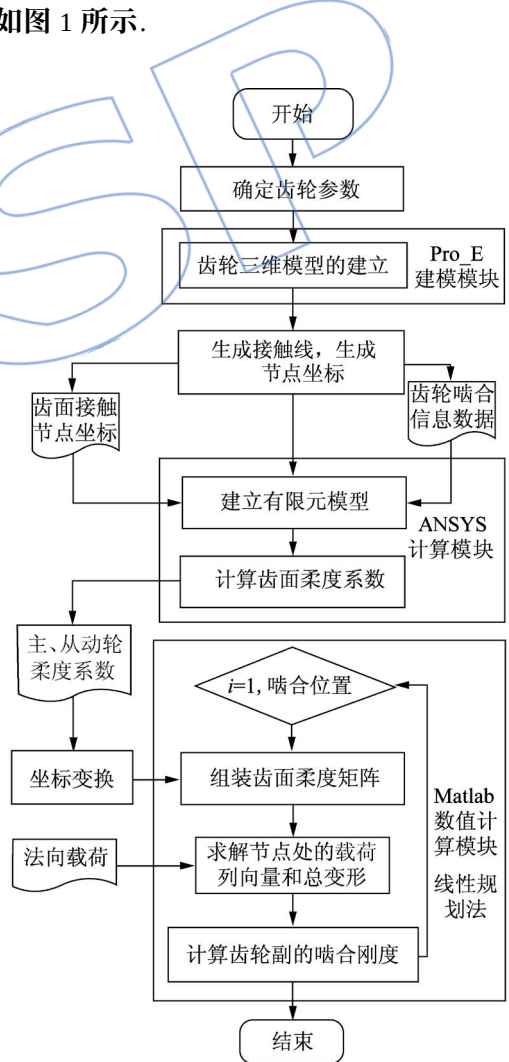


图 1 啮合刚度改进算法的计算流程

Fig. 1 Flow chart of meshing stiffness calculating with modified method

2 内、外啮合齿轮啮合刚度计算结果

以一对内、外啮合斜齿轮为例,利用第 1 节介绍的改进计算方法,计算了螺旋角为 5° 、 10° 、 15° 、 20° 、 25° 时内、外啮合斜齿轮副的啮合刚度. 为了减小计算规模,节省计算时间,所有的齿轮模型均采用三齿模型.

2.1 外啮合齿轮副

外啮合齿轮副的参数如表 1 所示,计算齿轮模型如图 2 所示,不同螺旋角时啮合刚度的计算结果如图 3(a)~(e) 所示.

表 1 外啮合副齿轮参数

Table 1 Parameters of external gear pair

z		m_n/mm	$\alpha_n/(\text{^\circ})$	B/mm
37	62	2.5	20	34

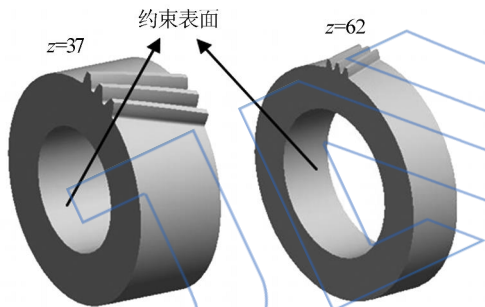
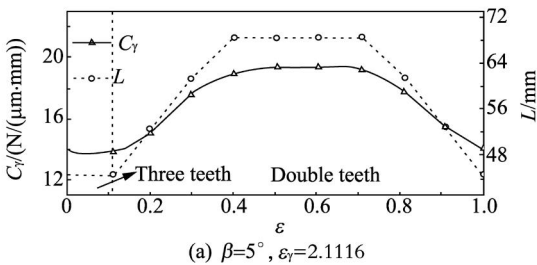
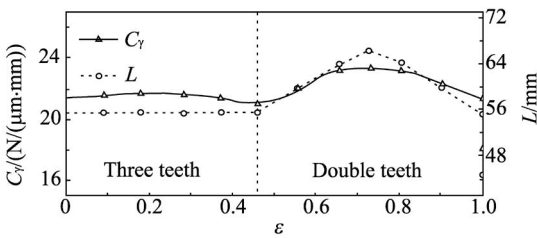


图 2 外啮合副齿轮模型 ($\beta=20^{\circ}$)

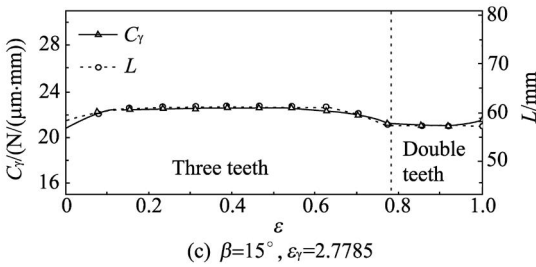
Fig. 2 Model of external gear pair ($\beta=20^{\circ}$)



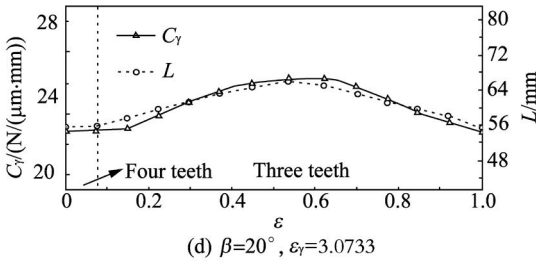
(a) $\beta=5^{\circ}$, $\varepsilon_{\gamma}=2.1116$



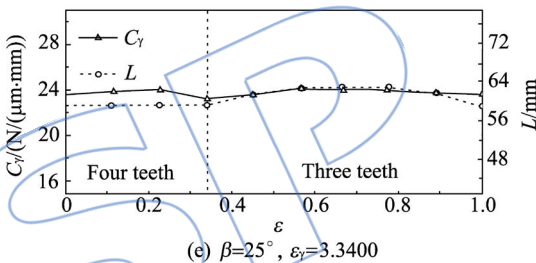
(b) $\beta=10^{\circ}$, $\varepsilon_{\gamma}=2.4573$



(c) $\beta=15^{\circ}$, $\varepsilon_{\gamma}=2.7785$



(d) $\beta=20^{\circ}$, $\varepsilon_{\gamma}=3.0733$



(e) $\beta=25^{\circ}$, $\varepsilon_{\gamma}=3.3400$

图 3 外啮合副啮合刚度计算结果

Fig. 3 Meshing stiffness of external gear pair with different helical angels

2.2 内啮合齿轮副

内啮合齿轮副的参数如表 2 所示,计算齿轮模型如图 4 所示,不同螺旋角时啮合刚度的计算结果如图 5(a)~(e) 所示.

表 2 内啮合副齿轮参数

Table 2 Parameters of internal gear pairs

z	m_n/mm	$\alpha_n/(\text{^\circ})$	B/mm	
62	161	2.5	20	34

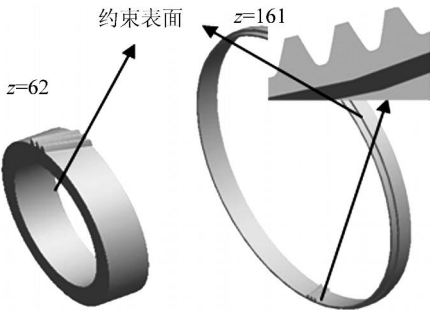


图 4 内啮合副齿轮模型 ($\beta=20^{\circ}$)

Fig. 4 Model of internal gear pair ($\beta=20^{\circ}$)

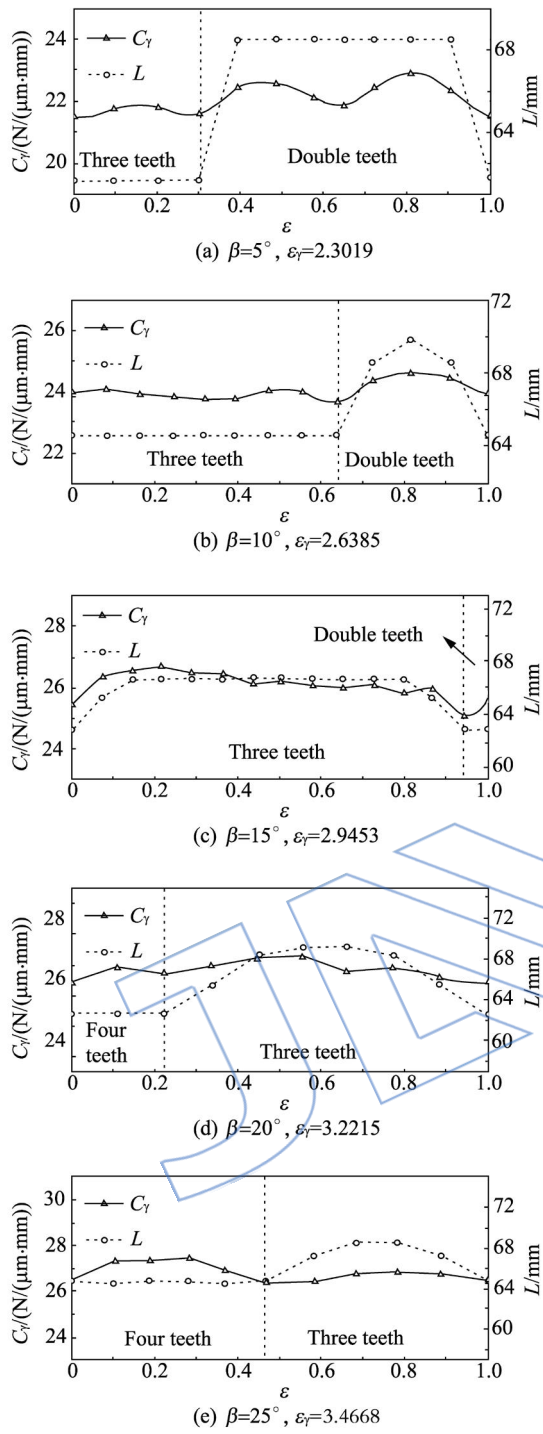


图 5 内啮合副啮合刚度计算结果

Fig. 5 Meshing stiffness of internal gear pair with different helical angles

3 计算结果分析

用图 6 中啮合线 $N_1 N_2$ 上所标记的点来描述齿轮副的整个啮合过程. 图中的 B_2 点表示当前轮齿进入啮合, C_1 点表示前一个轮齿退出啮合, P 点表示当前轮齿位于节圆处, D_1 点表示下一个

轮齿进入啮合, B_1 点表示当前轮齿退出啮合. 根据整个啮合过程, 以斜齿轮端面实际啮合线段长 $\varepsilon a p_{bt}$, 即 $B_1 B_2$ 的长度为高, 以齿宽 B 为长展成如图 7 所示的斜齿圆柱齿轮啮合面的平面坐标系 (啮合作用面坐标系). 图中的 ε_a 为端面重合度, p_{bt} 为端面基节长, β_b 为基圆螺旋角.

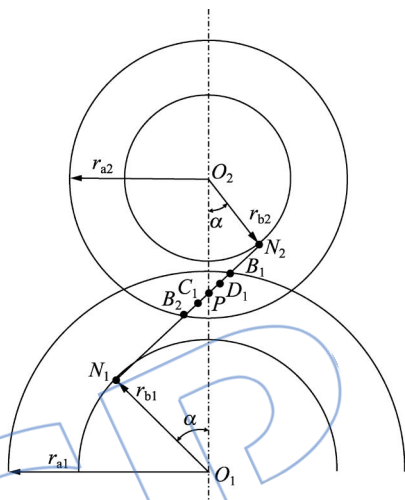


图 6 斜齿轮副外啮合过程示意图

Fig. 6 Meshing process of helical gear pair

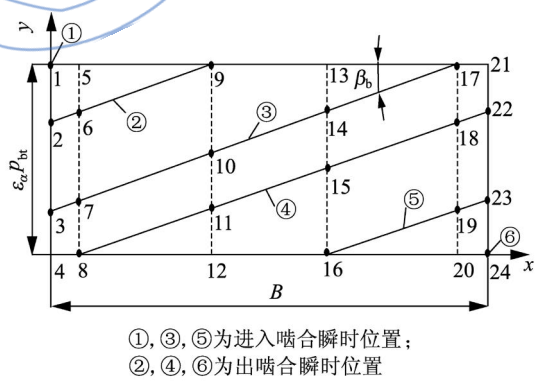


图 7 斜齿轮啮合的作用面坐标系

Fig. 7 Acting surface coordinate system of helical gear engagement

啮合齿数的变化规律可以根据齿轮参数确定. 齿轮啮合刚度的周期性变化一般是由参与啮合的轮齿对数的周期性变化而引起的. 齿轮参与啮合的轮齿对数在一个啮合周期过程中有 N 齿或者 $N + 1$ 齿两种情况 (N 为小于重合度的最大整数). 设斜齿轮在一个端面基节内, 在 mp_{bt} 段内是 $N + 1$ 齿啮合区, 则 m 应满足关系式: $mp_{bt} + Np_{bt} \leq \varepsilon_a p_{bt}$, 即在离齿顶 $(\varepsilon_a - N)p_{bt}$ 的区域内, 齿轮处于 $N + 1$ 齿啮合区, 之外则是 N 齿啮合区. 其中 ε_a 是斜齿轮副的总重合度. 图 3 和图 5 根

据每一对齿轮副的总重合度用一条竖直虚线分隔 $N + 1$ 齿啮合区和 N 齿啮合区,虚线左侧是 $N + 1$ 齿啮合区,右侧是 N 齿啮合区。

图 3 和图 5 中同时画出了啮合刚度和啮合线总长度在一个啮合周期中的变化曲线。图中的横坐标 ε 为无量纲时间,表示一个轮齿从进入啮合到对应啮合位置所经历的时间与啮合周期的比值;纵坐标 G_v 为啮合刚度, L 为啮合线总长度。啮合线总长度 L 是每个啮合位置参与啮合的所有轮齿所形成的啮合线的总长度。从图 3 和图 5 显示的内、外啮合副啮合刚度的计算结果可以看出,决定啮合刚度大小最直接的因素是啮合线总长度。以每个啮合位置的 ε 为自变量,该啮合位置啮合线总长度的计算表达式可以写成

$$L = \sum_{i=1}^n L_i$$

其中当 $\varepsilon \leq \varepsilon_i - N$ 时, $n = N$, 否则 $n = N - 1$; L_i 为每个啮合位置第 i 条啮合线的长度,其计算表达式为

$$L_i = \begin{cases} \frac{(\varepsilon + i - 1) p_{bt}}{\sin \beta_0} & 0 \leq \varepsilon + i - 1 \leq 1 \\ \frac{p_{bt}}{\sin \beta_0} & 1 < \varepsilon + i - 1 \leq \frac{B \tan \beta}{p_{bt}} \\ \frac{B}{\cos \beta_0} - \frac{(\varepsilon + i - 1 - \varepsilon_0) p_{bt}}{\sin \beta_0} & \end{cases}$$

与直齿轮不同的是,在斜齿轮啮合过程中, N 齿啮合区的啮合线总长度要大于 $N + 1$ 齿啮合区的啮合线总长度,因此对于斜齿轮而言, $N + 1$ 齿啮合区的啮合刚度一般小于 N 齿啮合区的啮合刚度。在斜齿轮啮合过程中,齿面中间部分啮合区内的啮合线长度一般大于边缘部分啮合区内的啮合线长度。

图 3 和图 5 显示在不同的螺旋角时,啮合刚度与啮合线总长度的变化关系会有所不同,在某些啮合线总长度相同的位置,啮合刚度并不完全相等,这主要是受啮合线在齿面具体位置的影响。从图 3 和图 5 可以看出:在 $N + 1$ 齿啮合区内,在如图 7 所示的 ①、③、⑤ 进入啮合瞬时位置和 ②、④、⑥ 退出啮合瞬时位置,其啮合刚度一般小于 $N + 1$ 齿啮合区其他位置的啮合刚度。斜齿轮在进入和退出啮合的瞬时位置,啮合线位于齿面的上部,离约束位置更远,轮副相对变形更大,啮合刚度更小。并且有一对齿是齿顶啮合,是点接触,轮齿刚度更小。啮合线长度相同的位置,远离进入

啮合和退出啮合的位置啮合刚度更大,因此一个啮合周期中的啮合刚度曲线大致呈现为两段抛物线。

图 3 和图 5 中的啮合刚度曲线在某些位置出现波动(如图 5(a) 双齿啮合区内的波动)是因为在划分如图 7 所示的作用面时啮合位置不完全均匀,导致每条接触线附件的网格密度有一定差异,网格密度会影响齿面的软硬程度进而影响啮合刚度的大小。

表 3 是中国航空工业部标准 (HB/ Z 84. 1-1984)^[14] 和本文计算结果的对比。HB/ Z 84. 1-1984 的计算结果显示,随着螺旋角的增大,外啮合副啮合刚度变化很小,内啮合副的啮合刚度减小,文献[15]的计算结果表明螺旋角对斜齿轮副啮合刚度的影响并不大,而本文计算出来的内、外啮合副的啮合刚度都会变大,这主要是因为轮缘厚度对啮合刚度的影响较为明显。

表 3 与 HB/ Z 84. 1-1984 计算结果比较

Table 3 Result comparison with HB/ Z 84. 1-1984

$\beta (^{\circ})$	$G_v / (N / (\mu m \cdot mm))$			
	外啮合副		内啮合副	
	HB/ Z 84. 1-1984 ^[14]	本文	HB/ Z 84. 1-1984 ^[14]	本文
5	22.4919	17.1088	27.3095	22.1228
10	22.6712	21.9723	27.0468	24.0402
15	22.8502	22.0772	26.5618	26.1097
20	22.8667	23.6366	25.8069	26.3481
25	22.5559	23.7976	24.7464	26.8566

HB/ Z 84. 1-1984 中,对不存在辐板结构的实心齿轮,轮体结构系数 C_r 恒为 1,本文的计算结果显示这个处理方式不够精确。定义轮缘厚度系数为: $\lambda = |r_f - r_0| / |r_a - r_f|$, 其中外齿轮 r_0 为齿轮内孔半径,内齿轮是外圈半径, r_f 为齿根圆半径, r_a 为齿顶圆半径。本文算例中 r_0 都是恒定的,随着螺旋角的增大,齿高 $|r_a - r_f| = m_n (2 h_a^* + c^*)$ 是不变的,齿根圆半径 r_f 在齿根高保持不变的情况下,会随着分度圆半径的增大而变大,因此轮缘厚度系数会减小。如图 2 和图 4 所示,外齿轮是在齿轮内孔约束的,内齿轮是在齿轮外花键节圆半径处约束的。轮缘厚度系数变小,内、外轮齿的变形都变小,啮合刚度变大。本文所使用的改进方法因为结合了商用造型软件和有限

元计算软件,因此可以很方便的计算分析辐板结构对齿轮副啮合刚度的影响.

4 结 论

1) 在斜齿轮副一个啮合周期中,影响任意啮合位置啮合刚度大小的主要因素是啮合线总长度,啮合线总长度越大,啮合刚度越大.本文给出了任意啮合位置啮合线总长度的计算方法.

2) 啮合线在齿面的具体位置会影响啮合刚度的大小:进入啮合和退出啮合的瞬时位置,啮合刚度会减小;啮合线总长度相同时,离这两个位置越远,啮合刚度越大.

3) HB/Z 84.1-1984 定义实心齿轮的轮体结构系数 G 恒为 1 的处理方式是不够精确的.啮合刚度与约束位置和齿高有关系.轮缘厚度系数减小,啮合刚度会增大.

参考文献:

- [1] Theodossiades S, Natsiavas S. Nonlinear dynamics of gear-pair systems with periodic stiffness and backlash[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 229(2): 287-310.
- [2] JIA Shengxiang, Howard I. Comparison of localized spelling and crack damage from dynamic modeling of spur gear vibrations[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2006, 20: 332-349.
- [3] LIN J, Parker R. G. Planetary gear parametric instability caused by mesh stiffness variation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 249: 129-145.
- [4] Kiracofe D R, Parker R. G. Structured vibration modes of general compound planetary gear systems[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2007, 129(1): 1-16.
- [5] Umezawa K. Deflection and moments due to a concentrated load on a rack-shaped cantilever plate with finite width for gears[J]. Bulletin of JSME, 1972, 15(79): 116-130.
- [6] Umezawa K. The meshing test on helical gear under load transmissions: 1st report —The approximate formula for deflections of gear tooth[J]. Bulletin of JSME, 1972, 15(90): 1632-1639.
- [7] Umezawa K. The meshing test on helical gear under load transmissions: 2nd report —The approximate formula for bending-moment distribution of gear tooth[J]. Bulletin of JSME, 1973, 16(92): 407-413.
- [8] Umezawa K. The meshing test on helical gear under load transmissions: 3rd report —The static behaviours of driven gear[J]. Bulletin of JSME, 1974, 17(112): 1348-1355.
- [9] Umezawa K, Suzuki T, Houjoh H, et al. Vibrations of power transmission helical gears (the effect of contact ration on the vibration) [J]. Bulletin of JSME, 1985, 28(238): 694-700.
- [10] Umezawa K, Suzuki T, Sato T. Vibrations of power transmission helical gears (approximate equation of tooth stiffness) [J]. Bulletin of JSME, 1986, 29(251): 1605-1611.
- [11] 刘更. 内、外啮合圆柱齿轮动态特性的理论和实验研究[D]. 西安: 西安交通大学, 1994: 7-17.
LIU Geng. The theory and experimental research on the dynamic behaviors of external and internal cylindrical gears [D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 1994: 7-17. (in Chinese)
- [12] Monch E, Roy A. K. Photoelastic investigation of a helical spur gear[J]. Engineers Digest, 1958, 19: 53-57.
- [13] 卜忠红, 刘更, 吴立言, 等. 基于线性规划法的齿轮啮合刚度与载荷分布计算的改进方法[J]. 机械科学与技术, 2008, 27(11): 1365-1368.
BU Zhonghong, LIU Geng, WU Liyan, et al. A modified approach to determine the mesh stiffness and load distribution of cylinder gear based on linear programming[J]. Mechanical and Science and Technology for Aerospace Engineering, 2008, 7(11): 1365-1368. (in Chinese)
- [14] 中华人民共和国航空工业部. HB/Z 84.1-1984 航空渐开线圆柱齿轮承载能力一般系数计算[S]. 北京: 国防科学技术工业委员会, 1986: 23-25.
- [15] 刘更, 沈允文, 何大为. 齿轮参数对斜齿轮传动振动特性的影响[J]. 西北工业大学学报, 1992, 10(1): 67-73.
LIU Geng, SHEN Yunwen, HE Dawei. Influence of gear parameters on the vibration characteristics of helical gears [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 1992, 10(1): 67-73. (in Chinese)